UAM Universidad Autónoma de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2018-2019** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las características siguientes: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, almacenamiento de datos alfanuméricos, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo.
b) Determínese si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.
a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.
b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a) Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 3)$.
b) Determínense los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad ($\bigcup$) y convexidad ($\bigcap$) de esta función.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0'6$, $P(B) = 0'8$ y $P(A \cap \overline{B}) = 0'1$.
a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y $\overline{B}$ son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso B.
b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o B.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.
a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99'2 % para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.
b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real m:

$$\left.\begin{array}{rcl} -x+y+z & = & 0 \\ x+my-z & = & 0 \\ x-y-mz & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) Determínense los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x = y = z = 0$.
b) Resuélvase el sistema para $m = 1$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{8}{x^2+4}$$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.
b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 2$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 3, \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

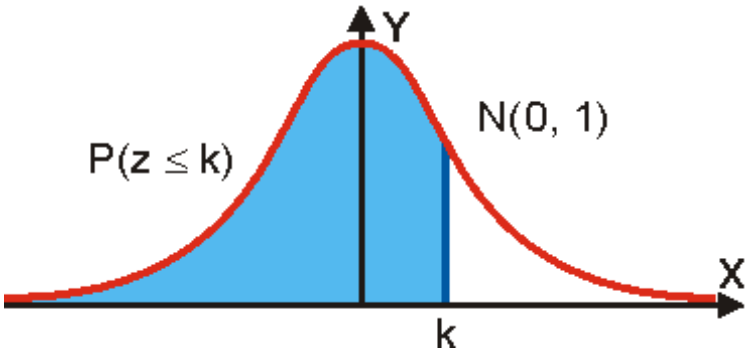
a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k.
b) Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0'60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0'30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0'15. Seleccionado un niño al azar de esta región,

a) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.
b) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1'5$ kilogramos.
a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0'49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.
b) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5'75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR, N(0, 1)



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

EXAMEN MATEMÁTICAS
SELECTIVIDAD MADRID
CC SS

OPCIÓN A

① Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ⓐ Obténgase el valor de la constante "k" para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo.

$|A - 2B| = 0$

$$A - 2B = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2k - 4 - 24 + 0 - (0 + 1 + 0) = 0$$

$$2k - 29 = 0 \rightarrow \boxed{k = \frac{29}{2}} \checkmark$$

ⓑ Determínese si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

La matriz C no puede ser invertible porque no es una matriz cuadrada.

$$C^t \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

probemos si puede tener inversa $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$ por lo tanto sí puede tener inversa.

$$(C^t \cdot C)^{-1} = \frac{(Adj\,(C^t \cdot C))^t}{|C^t \cdot C|}$$

$$Adj(C^t \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (Adj(C^t \cdot C))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(C^t \cdot C)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \boxed{\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

SOLUCIÓN

② Lena voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

ⓐ Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

Litros de helado → x
Litros de horchata → y

Restricciones $\begin{cases} x \leq 15 \\ x+y < 10 \\ x+2y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

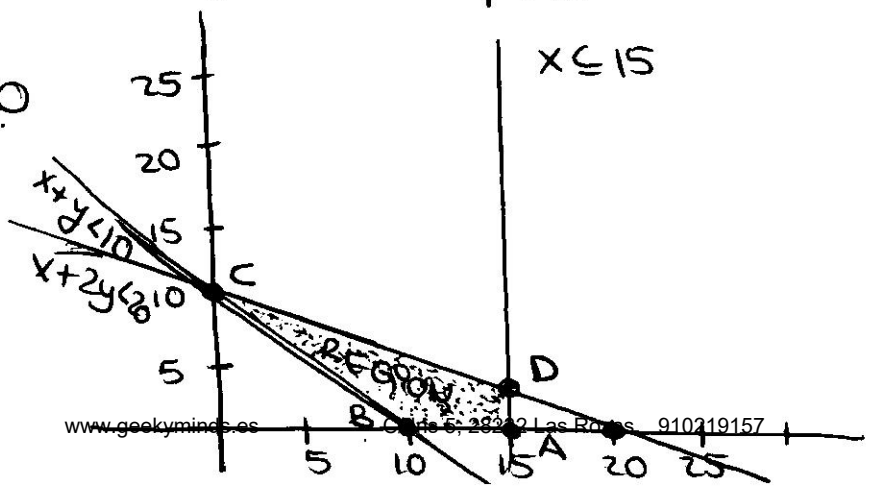
FUNCIÓN OBJETIVO → $f(x,y) = 25x + 12y$

$x+y < 10$

x	y
0	10
10	0

$x+2y \leq 20$

x	y
0	10
20	0



ⓑ Si el beneficio por litro es de 25€ para el helado y 12€ para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio máximo que podría obtenerse.

Comprobamos los vértices para ver cual es el beneficio máximo. FUNCIÓN OBJETIVO = $25x + 12y$

$A(15,0) \rightarrow 375€$

$B(10,0) \rightarrow 250€$

$C(0,10) \rightarrow 120€$

$D(15,2'5) \rightarrow 450€$: máximo BENEFICIO $\begin{cases} 15 \text{ litros de helado} \\ 2'5 \text{ litros de horchata} \end{cases}$

③ La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f(x)' = 2x^2 - 4x - 6$$

ⓐ Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0,3)$.

Para saber $f(x)$ tendremos que integrar su derivada.

$$f(x) = \int f(x)'\,dx = \int 2x^2 - 4x - 6\,dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - \frac{6x}{1} + C$$

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + C$$

Voy a sustituir el pto $(0,3)$ para saber C.

$$3 = \frac{2 \cdot 0}{3} - 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + C \rightarrow \boxed{C = 3}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + 3} \checkmark$$

ⓑ Determínese los extremos relativos de la función f(x) indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estudíese la concavidad (∪) y convexidad (∩) de esta función.

Igualamos a cero para sacar los ptos → $f(x)' = 0$

$$f(x)' = 2x^2 - 4x - 6 \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4}$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{4} = \begin{cases} \frac{4+8}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ \frac{4-8}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

	(-2)	-1	(0)	3	(4)
f(x)'	⊕		⊖		⊕
	crece		decrece		crece
		(-1, 49/3) máximo		(3, -15) mínimo	

Concavidad y convexidad con la segunda derivada:

$f(x)'' = 4x - 4 \rightarrow$ igualo a cero

$f(x)'' = 0$

$4x - 4 = 0$

$\boxed{x = +1}$

PTO DE INFLEXIÓN

	(0)	+1	(2)
f(x)''	⊖		⊕
	CONVEXA		CONCAVA

PTO DE INFLEXIÓN (+1, 0) cambio de curvatura

f(x) concava $(-\infty, 1)$

f(x) convexa $(1, +\infty)$

④ Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0'6$; $P(B) = 0'8$ y $P(A \cap \bar{B}) = 0'1$.

ⓐ Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y $\bar{B}$ son independientes. $\bar{B}$ denota el complementario del suceso B.

$$P\left(\frac{A}{\bar{B}}\right) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0'1}{1 - 0'8} = 0'5$$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) = 0'6 - 0'1 = 0'5$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow 0'5 = 0'6 \cdot 0'8$

$\underbrace{0'5 \neq 0'48}$

por lo tanto, como vemos no son independientes.

(b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A ó B.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'6 + 0'8 - 0'5 = \boxed{0'9}$

(5) El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2

(a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza del 99'2% para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.

$n = 64$

$\bar{x} = 34$

$1 - \alpha = 0'992$

$z_{\alpha/2} = 2'65$

$X \sim N(\mu, \sqrt{49}) = N(\mu, 7)$

$I.C. = (\bar{x} - \varepsilon ; \bar{x} + \varepsilon)$

$I.C. = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

$I.C. = \left(34 - 2'65 \cdot \frac{7}{\sqrt{64}} ; 34 + 2'65 \cdot \frac{7}{\sqrt{64}} \right)$

$\boxed{I.C. = (31'68 ; 36'32)}$

(b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 €, con una confianza del 95%.

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon = 3 \\ 1-\alpha = 95\% \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96 \end{array}\right\} n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{\varepsilon}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 7}{3}\right)^2 = \boxed{20'91}$$

OPCIÓN B MATES CCSS MADRID JUNIO '19

① Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real "m":

$$\left.\begin{array}{l} -x + y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x - y - mz = 0 \end{array}\right\}$$

ⓐ Determínase los valores del parámetro real "m" para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x = y = z = 0$.

Estudio el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} = +m^2 - 1 - 1 - (m - m - 1) =$$

$$= m^2 - 2 + 1 = m^2 - 1$$

(igualo a cero) $m^2 - 1 = 0$

$m^2 = 1 \rightarrow m = \pm\sqrt{1}$

$\boxed{m = \pm 1}$

Si $m \neq 1$ ó $m \neq -1$
$Ran(A) = 3$ y $Ran(A^*) = 3$ } S.C.D.

Si $m = 1$ $\left\{ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} \right.$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} Ran(A) = 2 \\ Ran(A^*) = 2 \end{array}\right\} \text{S.C.I.}$$

Si $m = -1$ $\left\{ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} \right.$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Sigo probando menores $\begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & -m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -1 - (1) = -2 \neq 0$

S.C.I. $\left\{ \begin{array}{l} Ran(A) = 2 \\ Ran(A^*) = 2 \end{array} \right.$

ⓑ Resuélvase el sistema para $m=1$.

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ x+1y-z=0 \\ x-y-1z=0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)_{F_2=F_2+F_1} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)_{F_3=F_3+F_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ 2y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{y=0}$$

Llamaremos $\boxed{z=\lambda}$

$-x=-z-y$

$-x=-z \rightarrow \boxed{x=\lambda}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Solución:} \\ x=\lambda \quad y=0 \\ z=\lambda \end{array}}$$

② Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\frac{8}{x^2+4}$$

ⓐ Determínese los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténgase sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.

$$f(x)=\frac{8}{x^2+4}$$

Para el dominio, igualo a cero $x^2+4=0$ pero como no tiene solución real pues su dominio es todo $\mathbb{R}$. $(x^2+4\neq 0)$

$\boxed{\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}}$

y por tanto NO HAY ASÍNTOTAS VERTICALES.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{8}{x^2+4} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{8}{x^2+4} = 0$$

Asíntota horizontal para $\boxed{y=0}$

(como tiene asíntota horizontal → no tiene asíntota oblicua)

Crecimiento y decrecimiento:

$$f(x)' = \frac{-2x \cdot 8}{(x^2+4)^2} = \frac{-16x}{(x^2+4)^2} \to f(x)' = 0$$

$$-16x = 0 \to \boxed{x=0}$$

	(-1)	0	(+1)
$f(x)'$	⊕		⊖
	crece		decrece

máximo relativo

$x=0 \to y = \frac{8}{x^2+4} = \frac{8}{4} = 2$

$\boxed{(0,2)}$ máximo

crece de $(-\infty, 0)$

decrece $(0, +\infty)$

ⓑ Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=2$.

$$f(x)' = \frac{-16x}{(x^2+4)^2} \to f(2)' = \frac{-16 \cdot 2}{(2^2+4)^2} = \frac{-32}{(4+4)^2} = \frac{-32}{8^2} =$$

$$f(2)' = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2} \quad // \quad f(2) = \frac{8}{x^2+4} = \frac{8}{8} = 1$$

Recta tg → $y - f(a) = f(a)' \cdot (x-a)$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2) \to y = -\frac{x}{2} - 2 + 1$$

$$\boxed{y = -\frac{x}{2} - 1}$$

③ La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

ⓐ Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k.

$\boxed{\text{Para } x=0}$

$f(0) = e^x + k = e^0 + k = 1 + k$

$f(0^+) = 1 - x^2 = 1 - 0 = 1$

$f(0^-) = e^x + k = 1 + k$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

$\Downarrow$

$1 + k = 1$

$\boxed{k = 0}$

$\boxed{\text{Si } k = 0 \quad f(x) \text{ es continua en } x = 0}$

(si $k \neq 0$ no es continua en $x = 0$)

$\boxed{\text{Para } x=3}$

$f(3) = 1 - x^2 = 1 - 3^2 = 1 - 9 = -8$

$f(3^+) = \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{3-3} = \dfrac{1}{0^+} \quad +\infty$

$f(3^-) = 1 - x^2 = -8$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$

$-8 \neq \frac{1}{0} \neq +\infty$

$\boxed{\text{Discontinuidad de salto infinito en } x = 3}$

ⓑ Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

$$A = \left| \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \right|$$

Como viene de una función a trozos, en el intervalo a estudiar $(-1,1)$ hay un punto $x=0$ en el que hemos estudiado su continuidad, entonces hay que dividir en dos partes este área: entre -1 y 0 y entre 0 y 1. Ya que además las funciones que le afectan son diferentes.

$$A = \left| \int_{-1}^{0} e^x + k\, dx + \int_{0}^{1} (1-x^2)\, dx \right|$$

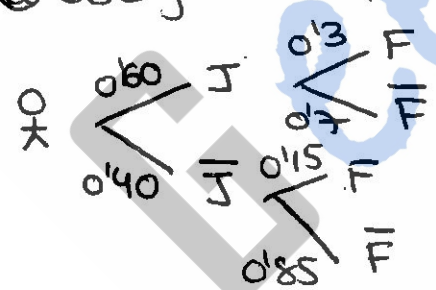
$\boxed{k=0}$

$$A = \left| \int_{-1}^{0} e^x\, dx + \int_{0}^{1} (1-x^2)\, dx \right| = \left[e^x\right]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = (e^0 - e^{-1}) + \left(1 - \frac{1}{3} - 0\right) =$$

$$= 1 - e^{-1} + \frac{3-1}{3} = \frac{3+2}{3} - \frac{1}{e} = \boxed{\frac{5e-3}{3e}\ u^2}$$

④ De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0'60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0'30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0'15. Seleccionado un niño al azar de esta región,

ⓐ Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.



$$P(F) = 0'6 \cdot 0'3 + 0'4 \cdot 0'15 = \boxed{0'24}$$

ⓑ Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

$$P\left(\frac{\bar{J}}{F}\right) = \frac{P(\bar{J} \cap F)}{P(F)} = \frac{0'4 \cdot 0'15}{0'24} = \boxed{0'25}$$

⑤ El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1'5$ kilogramos.

ⓐ En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95%. La amplitud de este intervalo resultó ser 0'49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.

$N(\mu, 1'5)$

$1 - \alpha = 0'95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$

Amplitud $\rightarrow 2\varepsilon = 2 \cdot z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0'49 \rightarrow 2 \cdot 1'96 \cdot \frac{1'5}{\sqrt{n}} = 0'49$

$$n = \left(\frac{2 \cdot 1'96 \cdot 1'5}{0'49}\right)^2 = \boxed{144}$$

ⓑ Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5'75 kilogramos que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

$P(\bar{X} > 5'75) \rightarrow$ vamos a tipificar $\rightarrow P\left(Z > \frac{5'75 - 6}{0'1}\right) = P(Z > -2'5)$

$= P(Z < 2'5) = \boxed{0'9938}$