Universidad Autónoma de Madrid

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.
b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Ejercicio 2 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.
b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Ejercicio 3 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2, -5, 1)$ y tiene dirección $(-1, 0, -1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.
b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.
c) (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Ejercicio 4 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.
b) (1.5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Ejercicio 2 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.
b) (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
c) (0.5 puntos) Calcular los límites laterales $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$.

Ejercicio 3 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el punto $A(2, 1, 0)$ y el plano $\pi \equiv\ 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.
b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.
c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

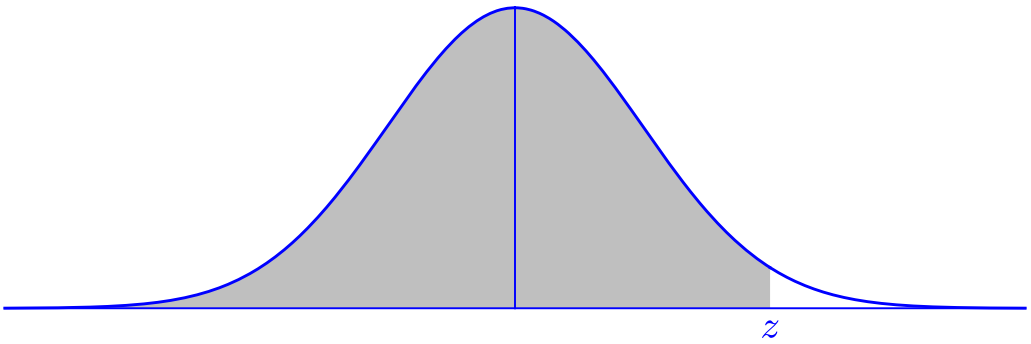
Ejercicio 4 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II
SELECTIVIDAD
MADRID 2019

OPCIÓN A

① Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

ⓐ Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ a & 2 & 2-a \\ 2 & a & a-2 \end{vmatrix} = 6a-12+16-8a+a^2-(4+4a^2-8a+6a-3a^2)$$
$$= -2a+4+a^2-(4+a^2-2a)=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2-6+8-(-4a+3a+4) =$$
$$= a^2+2-(-a+4) = a^2+2+a-4 =$$
$$= a^2+a-2 \quad \text{Igualo a cero } a^2+a-2=0$$
$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{1^2+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}$$

$$a = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2-a \\ -1 & a & a-2 \end{vmatrix} = 2a-4-8+4a+a-(-2+4a-8+2a-a^2)$$
$$= \cancel{6a}+a-12-(-10+\cancel{6a}-a^2) =$$
$$= a-12+10+a^2 = a^2+a-2$$
(igual que el anterior)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ a & 1 & 2-a \\ 2 & -1 & a-2 \end{vmatrix} = 3a-6+4-2a-a-(2+a^2-2a-6+3a)$$

$$= -2-(-4+a^2+a) =$$

$$= -2+4-a^2-a = -a^2-a+6$$

Igualo a cero

$$-a^2-a+6=0$$

$$a = \frac{+1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-1)\cdot 6}}{2\cdot(-1)} = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{-2}$$

$$a = \frac{1\pm\sqrt{25}}{-2} = \frac{1\pm 5}{-2} = \begin{cases} \frac{6}{-2} = -3 \\ \frac{-4}{-2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = -6+8+a^2-(4-4a+3a) =$$

$$= 2+a^2-4+a = a^2+a-2$$

(igual que los anteriores)

Para $a=1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-3 = -2 \neq 0$$

Para $a=-2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-3 = -5 \neq 0$$

Para $a=2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-3 = -1 \neq 0$$

Para $a=-3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3-3 = -6 \neq 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } a \neq 1 \text{ y } a \neq -2 \text{ y } a \neq 2 \text{ y } a \neq -3 \Rightarrow \text{Ran } A = 3 \\ \text{Si } a = 1 \text{ ó } a = -2 \text{ ó } a = 2 \text{ ó } a = -3 \Rightarrow \text{Ran } A = 2 \end{array}}$$

Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A M para el caso $a=0$

$$a=0 \rightarrow A \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |AM| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0-6+2-(0-6+4) = \boxed{-2}$$

tiene inversa (vamos a calcularla)

$$AM^{-1} = \frac{(Adj(AM))^t}{|AM|}$$

$$Adj(AM) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(AM))^t = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$AM^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} +4/2 & 8/-2 & 6/-2 \\ 0 & -1/-2 & -1/-2 \\ 2/-2 & -5/-2 & -3/-2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AM^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & +1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}}$$

② Dada $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

ⓐ Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ ASÍNTOTA HORIZ → $\boxed{y=0}$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{L.H.} \frac{\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{x^2} \to \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ indet

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{L.H.} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

ⓑ Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \to f(x)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$\frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \to 1 - \ln(x) = 0 \to -\ln(x) = -1$$

$$\ln(x) = 1$$

$$\boxed{x = e}$$

$\boxed{x=0}$ no ∃ p.s. $x > 0$

$$f(x) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$$

$\boxed{\text{punto de tangencia } \left(e, \frac{1}{e}\right)}$

$x = (1)$	e	$x = (3)$
$f(1)' = \frac{1 - \ln(1)}{1}$		$f(3)' = \frac{1 - \ln(3)}{9}$
$f(1)' = 1$		$f(3)' = -0'011$
$\oplus$		$\ominus$
crece	$\boxed{\text{máximo}}$ $\left(e, \frac{1}{e}\right)$	decrece

c) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y=0$ y $x=e$.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

cambio de variable $\left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \right.$

Área del recinto acotado por $f(x)$ y $y=0$ y $x=e$

$$\text{Área} = \int f(x)\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} = \frac{1}{2}\,u^2$$

3) Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta "s" que pasa por el punto $(2,-5,1)$ y tiene dirección $(-1,0,-1)$ se pide:

a) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z \qquad s \left\{ \begin{array}{l} x = 2-1\lambda \\ y = -5 \\ z = 1-1\lambda \end{array} \right.$$

$\vec{v}_r\ (2,-2,1)$ $\quad \vec{v}_s\ (-1,0,-1)$

A pto en r $(1,3,0)$ $\quad$ B pto en s $(2,-5,1) \rightarrow \vec{AB}\ (2-1, -5-3, 1-0) = (1,-8,1)$

$$\begin{array}{c} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \vec{AB} \end{array} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 0+2+8-(0+2+16) = -8 \neq 0 \qquad \boxed{\text{RAN 3 SE CRUZAN}}$$

b) Calcular un plano que sea paralelo a "r" y contenga a "s"

si contiene a "s" contiene el pto $B(2,-5,1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 0+2z-2-2y-10-(0-y-5+2x-4) = 0$$

$$2z-12-2y+y+5-2x+4 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv -2x - y + 2z - 3 = 0}$$

ⓒ Calcular un plano perpendicular a la recta "r" y que pase por el origen de coordenadas.

Como el plano es perpendicular a la recta "r", su vector normal al plano va a ser el mismo que Vdr (2,-2,1)
También dice que el plano pasa por el origen de coordenadas (0,0,0)

Por lo tanto → $2\cdot(x-0) - 2(y-0) + 1(z-0) = 0$

$$\boxed{\pi \equiv 2x - 2y + z = 0}$$

④ La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10%. Se pide:

ⓐ Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

X = nº peces que sobreviven.

$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - [P(x=1) + P(x=0)]$

$$\left.\begin{array}{l} S, N, N, N, N, N, N, N, N, N \\ N, S, N, N, N, N, N, N, N, N \\ \text{etc.} \end{array}\right\} P_{10} = 10$$

$P(\text{permutación } 1) = 0'1 \cdot 0'9^9$

$P(x=1) = P_{10} \cdot P(\text{permutación } 1) = 10 \cdot 0'1 \cdot 0'9^9 = 0'9^9$

$P(x=0) = 0'9^{10}$

$P(x=1) + P(x=0) = 0'9^9 + 0'9^{10} = 0'9^9(1 + 0'9) = 0'9^9 \cdot 1'9$

$P(x \geq 2) = 1 - [0'9^9 + 0'9^{10}] = 1 - 0'9^9 \cdot 1'9 = \boxed{0'264 = P(x \geq 2)}$

(b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

$B(n,p) \rightarrow B(200, 0'1)$ 10% sobrevive

$\hookrightarrow N(\mu, \sigma)$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0'1 \cdot 0'9} = 3\sqrt{2}$

$q = 1 - p = 1 - 0'1 = 0'9$

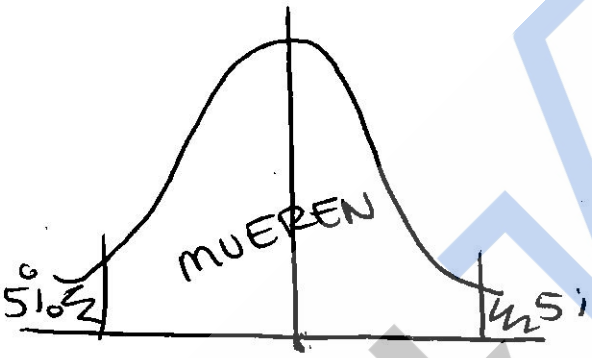
$\mu = np = 200 \cdot 0'1 = 20$

$N(20, 3\sqrt{2})$

$n = 200$

$\mu = 20$

$\sigma = 3\sqrt{2}$



$$P\left(Z < \frac{10-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{10-20}{3\sqrt{2}}\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{-10}{3\sqrt{2}}\right) = P(Z < -2'36) =$$

$$= 1 - P(Z > 2'36) = 1 - 0'9909$$

(Tabla)

$$= \boxed{9'9 \cdot 10^{-3}}$$

OPCIÓN B (SELECTIVIDAD MADRID 2019 MATEMÁTICAS II)

① Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.

Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento de 40% respecto a sus precios originales ¿cuales eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

x = Bocadillo

y = Refresco

z = Bolsa de patatas

$$\left.\begin{array}{l} 4x+2y+3z=19 \\ x+z=4 \\ x+y=\boxed{5} \end{array}\right\}$$

viene de: 3€ viene de descontar un 40% → 3€ es un 60%

$$\frac{60}{100}=\frac{3}{x} \rightarrow x=5€ \text{ sería el total}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x+2y+3z=19 \\ 4(x+z=4) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{4x}+2y+3z=19 \\ -\ \cancel{4x}+4z=16 \end{array}\right\}$$

$$2y-z=3$$

$$\left.\begin{array}{l} 2y-z=3 \\ +\ -2y+3z=-1 \end{array}\right\}$$

$$2z=2$$

$$\boxed{z=1}€ \checkmark$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x+2y+3z=19 \\ 4(x+y=5) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{4x}+2y+3z=19 \\ -\ \cancel{4x}+4y=20 \end{array}\right\}$$

$$-2y+3z=-1$$

$$x+z=4 \rightarrow x=4-z=4-1=3$$

$$\boxed{x=3}€ \checkmark$$

$$x+y=5 \rightarrow x=5-y=5-3=2$$

$$\boxed{y=2}€ \checkmark$$

② Dada la función $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$, se pide:

ⓐ Determinar su dominio.

Como es $\sqrt{\boxed{}}$ lo de dentro tiene que ser ⊕ $\boxed{} \geq 0$

$4x^2-x^4 \geq 0 \rightarrow x^2(4-x^2) \geq 0$

$x^2 \geq 0$ $\quad$ $4-x^2 \geq 0$

$x \geq 0$ $\quad$ $-x^2 \geq -4$

$\boxed{x=0}$ $\quad$ $x^2=4$

$\boxed{x=\pm 2}$

Ahora tenemos que probar las regiones.

$+\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ 0 $\quad$ $+2$ $\quad$ $-\infty$

(−3)	(−1)	(+1)	(+3)	
⊕	⊕	⊕	⊕	x^2
⊖	⊕	⊕	⊖	$4-x^2$
⊖	⊕	⊕	⊖	$x^2(4-x^2)$
	cumple ✓	cumple ✓		

Dominio $D(f)=[-2,2]$ incluidos ps $\sqrt{} \geq 0$

ⓑ Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$f(x)=\sqrt{4x^2-x^4} \rightarrow f(x)=(4x^2-x^4)^{1/2}$

$f(x)'=\frac{1}{2}(4x^2-x^4)^{-1/2}\cdot(8x-4x^3)=\frac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}}$

$f(x)'=0 \rightarrow \frac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}}=0 \rightarrow 8x-4x^3=0$

$x(8-4x^2)=0 \rightarrow x_1=0$

$8-4x^2=0 \rightarrow -4x^2=-8$

$x^2=\frac{-8}{-4}$

$x^2=2$

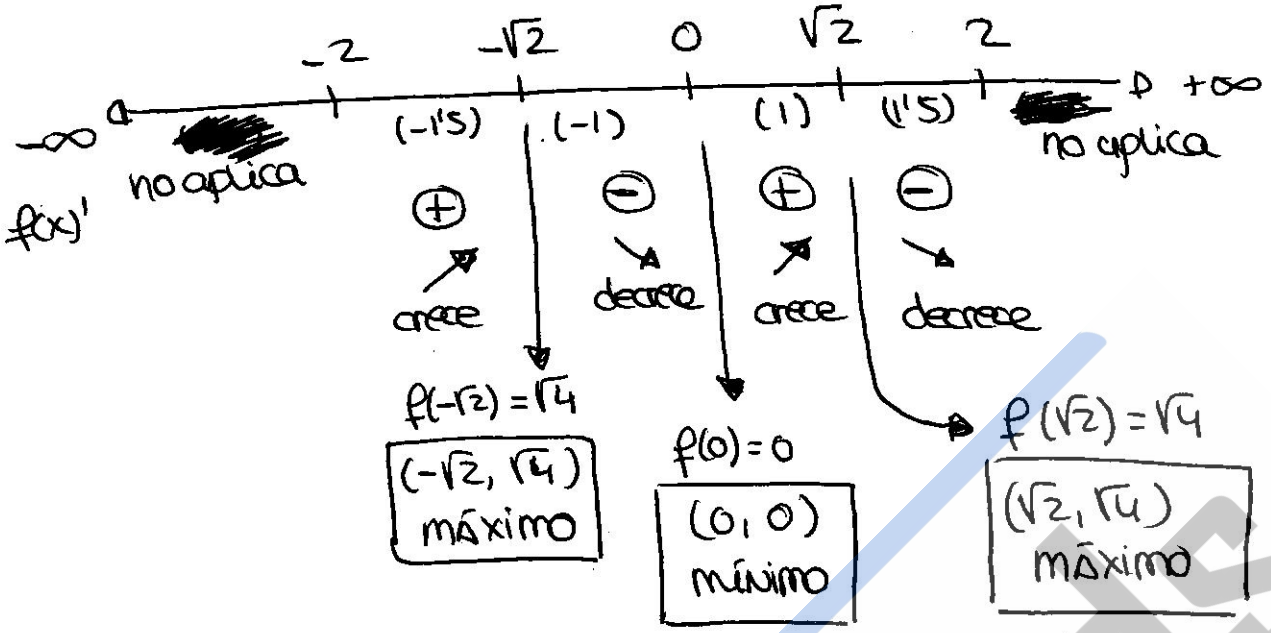
$x=\pm\sqrt{2}$

Tendremos los puntos entonces:

$x=+\sqrt{2}$ $\quad$ $x=-\sqrt{2}$ y los

anteriores $x=0$ $\quad$ $x=+2$

$x=-2$



Intervalos de crecimiento $\Big\}$ $(-2, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$

Intervalos de decrecimiento $\Big\}$ $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$

© Calcular los límites laterales $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|\sqrt{4 - x^2}}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|\sqrt{4-x^2}}{x} \begin{cases} \dfrac{+x\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{-x\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-x\sqrt{4-x^2}}{x} = -\sqrt{4-x^2} = -\sqrt{4} = \boxed{-2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{+x\sqrt{4-x^2}}{x} = +\sqrt{4-x^2} = +\sqrt{4} = \boxed{+2}$$

③ Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=36$ se pide:

ⓐ Determinar la distancia del punto A al plano π.

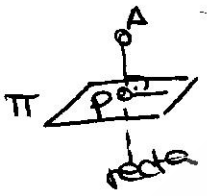
$$\text{distancia}(A,\pi) = \frac{|2(x_p)+3(y_p)+4(z_p)-36|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} =$$

$$= \frac{|2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 0-36|}{\sqrt{29}} = \frac{|-29|}{\sqrt{29}} = \frac{29}{\sqrt{29}} =$$

$$= \frac{29\cdot\sqrt{29}}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}} = \frac{29\sqrt{29}}{(\sqrt{29})^2} = \frac{\cancel{29}\sqrt{29}}{\cancel{29}} = \boxed{\sqrt{29}\ u}$$

ⓑ Halla las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

Se tiene que ser más próximo al plano usaremos el vector normal al plano (que será el más cercano PQ es un ángulo recto)



~~Con el vector director de la~~

Con el vector normal al plano y el punto A sacamos una recta:

Vector $N_\pi \equiv (2,3,4)$ $\quad A(2,1,0)$ recta $\begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 0+4\lambda \end{cases}$

Ahora calculamos el pto de corte de esa recta con el plano (metiendo la recta en el plano) y nos da directamente el pto buscado.

$\pi \equiv 2x+3y+4z-36=0 \rightarrow 2(2+2\lambda)+3(1+3\lambda)+4(4\lambda)-36=0$

$4+4\lambda+3+9\lambda+16\lambda-36=0 \rightarrow 29\lambda = 29 \rightarrow \lambda = \frac{29}{29} = 1$ $\quad \boxed{\lambda=1}$

Sustituimos λ en la recta para sacar el punto.

Recta $\begin{cases} x=2+2\lambda \rightarrow x=2+2\cdot 1=4 \\ y=1+3\lambda \rightarrow y=1+3\cdot 1=4 \\ z=0+4\lambda \rightarrow z=4\cdot 1=4 \end{cases}$

$\boxed{\text{PUNTO SOLUCIÓN } (4,4,4)}$

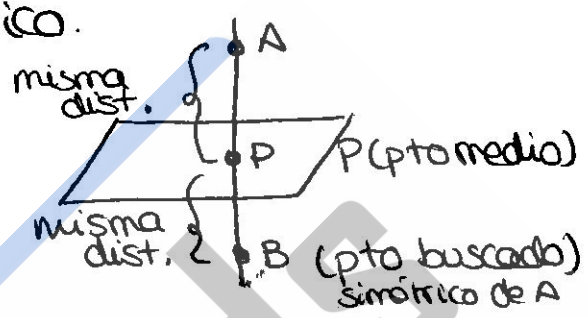
ⓒ Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

$A(2,1,0)$

$P(4,4,4)$

$B(x,y,z)$

El punto simétrico a A resulta de sacar su pto medio (que ya lo tenemos del apartado anterior), y con ese pto medio sacar el simétrico.



PTO MEDIO:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_P \rightarrow \frac{2+x}{2} = 4 \rightarrow x = 6$$

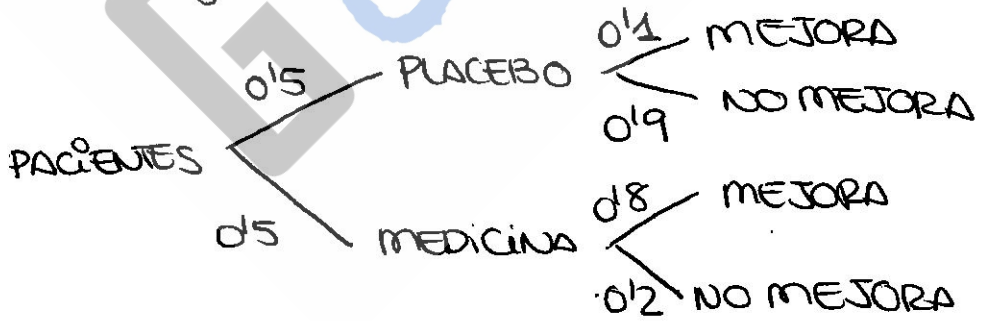
$$\frac{y_A + y_B}{2} = y_P \rightarrow \frac{1+y}{2} = 4 \rightarrow y = 7$$

$$\frac{z_A + z_B}{2} = z_P \rightarrow \frac{0+z}{2} = 4 \rightarrow z = 8$$

$$\boxed{B(6,7,8) \text{ simétrico de } A}$$

④ Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría expontanea es del 10%. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo

ⓐ Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.



POR PROBABILIDAD TOTAL:

$$P(\text{MEJORA}) = P(\text{medicina}) \cdot P\left(\frac{\text{mejora}}{\text{medicina}}\right) + P(\text{placebo}) \cdot P\left(\frac{\text{mejora}}{\text{placebo}}\right) =$$

$$\boxed{P(\text{MEJORA}) = 0'5 \cdot 0'8 + 0'5 \cdot 0'1 = 0'45} \ (45\%)$$

(b) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

TEOREMA DE BAYES:

$$P\left(\frac{\text{medicina}}{\text{mejora}}\right) = \frac{P(\text{medicina}) \cdot P(\text{mejora}/\text{medicina})}{P(\text{mejora})} =$$

$$\boxed{P\left(\frac{\text{medicina}}{\text{mejora}}\right) = \frac{0'5 \cdot 0'8}{0'45} = 0'88} \quad (88\%)$$