UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & (k+1)y & + & z & = & 0, \\ -x & + & ky & - & z & = & 0, \\ (k-1)x & - & y & & & = & -(k+1), \end{array}\right.$ se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

Ejercicio 2 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:
$$f(1) = 1,\ f'(1) = 2,\ g(1) = 3,\ g'(1) = 4.$$
Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) (1.25 puntos) Calcule la integral $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^4 (\cos x)^3 dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = \operatorname{sen} x$.)

Ejercicio 3 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.
b) (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.
c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Ejercicio 4 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) (1.25 puntos) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.
b) (1.25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5.6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.

b) (0.75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) (0.75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Ejercicio 2 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10-t)$.

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0.5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Ejercicio 3 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el plano, $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

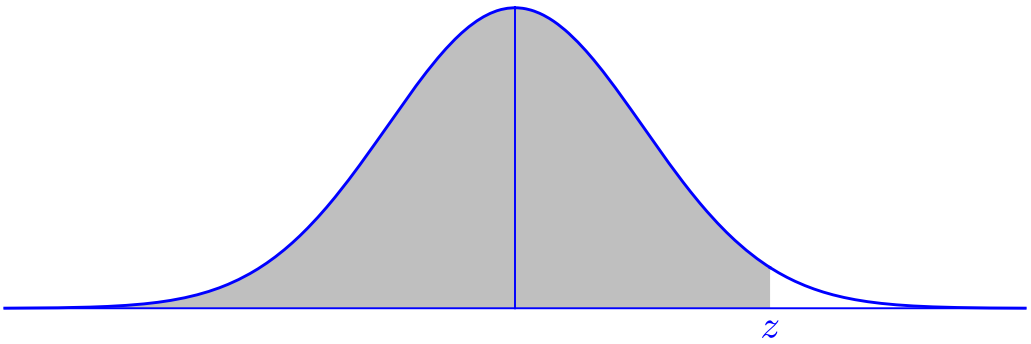
Ejercicio 4 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1.6 %, mientras que para los de alta gama es del 0.9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) (1.5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en las soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.

a) Obtener los valores críticos ($k = \pm 1$): 0.5 puntos (repartidos en planteamiento: 0.25, resolución: 0.25). Discutir el sistema: 0.5 puntos, por cada uno de los tres casos ($[k = -1], [k = 1], [k \neq \pm 1]$). En cada caso se valorará con 0.25 puntos el resultado correcto y con 0.25 la justificación.
b) Procedimiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.

Ejercicio 2.

a) Calcular $h'(0)$: 0.5 puntos (repartidos en 0.25 por la aplicación correcta de la regla de la cadena y 0.25 por el resultado final). Calcular $k'(1)$: 0.75 puntos (0.5 por aplicar la derivada del cociente y 0.25 por el resultado final).
b) Planteamiento del cambio de variable: 0.5 puntos. Hacer la primitiva de la función polinómica: 0.5 puntos. Deshacer el cambio: 0.25 puntos.

Ejercicio 3.

a) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.
b) Elección adecuada del punto D: 0.25 puntos. Justificación: 0.25 puntos.
c) Saber cómo tienen que ser las coordenadas de un punto del eje OX: 0.25 puntos. Planteamiento: 0.5 puntos. Resultado: 0.25 puntos

Ejercicio 4.

a) Identificar la variable binomial: 0.5 puntos. Calcular la probabilidad: 0.75 puntos (repartidos en 0.5 por el proceso y 0.25 por los cálculos).
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.

a) Calcular $A^2 - I$ y $2A$: 0.5 puntos. Obtener los valores de a: 0.5 puntos.
b) Obtener a: 0.25 puntos. Calcular la inversa en función del parámetro: 0.5 puntos.
c) Procedimiento: 0.5 puntos. Resultado: 0.25 puntos.

Ejercicio 2.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Calcular la primitiva: 0.5 puntos. Ajustar la constante: 0.25 puntos.
b) Calcular los puntos críticos: 0.5 puntos. Justificar que el máximo está en $t = 10$: 0.25 puntos. Obtener el número máximo de enfermos: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Aplicar correctamente el teorema de Bolzano: 0.25 puntos.

Ejercicio 3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Ejercicio 4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.75 puntos.

MATEMÁTICAS II - EXAMEN SELECTIVIDAD MADRID JULIO 2019

OPCIÓN A

1. Dado el sistema de ecuaciones
$$\left.\begin{array}{l} kx + (k+1)y + z = 0 \\ -x + ky - z = 0 \\ (k-1)x - y = -(k+1) \end{array}\right\}$$

Se pide:

ⓐ Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

$$|A| = \left(\begin{array}{ccc|c} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -(k+1) \end{array}\right) =$$

$$|A| = \begin{vmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (k^2-1) + 1 - (k^2 - k + 0 + k) =$$
$$= -k^2 + 1 + 1 - k^2 = 2 - 2k^2$$

$$|A| = 0 \rightarrow -2k^2 + 2 = 0 \rightarrow k^2 = \frac{-2}{-2} \rightarrow \boxed{k = \pm 1}$$

- Si $k \neq \pm 1$ el $Ran(A) = 3 = Ran(A^*) = $ nº incognitas $\rightarrow$ $\boxed{SCD}$
- Si $k = +1$

$$\hookrightarrow A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 0 + 0 + 1 - (0 + 1 + 0) = 0$$

Estudiamos otra: (simplificada)

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - (0 + 0 - 2) = 0$$

menor
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = +4+0+0-(0+0-2) = 4+2 = 6 \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ran } A = 2 \\ \text{Ran } A^* = 3 \\ \text{nº incog} = 3 \end{array}\right\} \text{ Sistema incompatible. } (\text{Ran } A \neq \text{Ran } A^*)$$

- Si $k = -1$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+1-(2+0-1) = 1-1 = 0$$

$$\text{Menor} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1-(0) = 1 \neq 0$$

Estudiamos otra 8 (AMPLIADA)

$$|A^*| = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow |A| = |A^*| = \text{Ran } 2$$

$|A| = |A^*| = \text{Ran } 2 < \text{nº incog} \rightarrow$ $\boxed{\text{S.C. Indet}}$

b) Resolver el sistema para $k = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) = F_2 = F_2 - F_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$= F_3 = 2F_1 - F_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} -x + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right\}$$

$\boxed{z=\lambda} \to y-2z=0 \to y=2z \to \boxed{y=2\lambda}$

$-x+z=0 \to -x=-z \to x=z \to \boxed{x=\lambda}$

$\boxed{2.}$ ⓐ Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$f(1)=1 \qquad g(1)=3$

$f(1)'=2 \qquad g(1)'=4$

Dada $h(x)=f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$.

Dada $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

ⓐ

$h(x)=f((x+1)^2) \to h'(x)=2(x+1)\cdot f'\cdot((x+1)^2)$

$h'(0)=2f'(1)=2\cdot 2=\boxed{4}$ ✓

$k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \to k'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}=$

$k'(1)=\dfrac{f'(1)\cdot g(1)-f(1)\cdot g'(1)}{[g(1)]^2}=\dfrac{2\cdot 3-1\cdot 4}{3^2}=\dfrac{6-4}{9}=\boxed{\dfrac{2}{9}}$ ✓

ⓑ Calcule la integral $\int (\operatorname{sen}x)^4\cdot(\cos x)^3dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t=\operatorname{sen}x$).

Hacemos el cambio de variable que nos han sugerido:

$$\left.\begin{array}{l} t=\operatorname{sen}x \\ dt=\cos x\,dx \\ dx=\dfrac{dt}{\cos x}\end{array}\right\} \int(\operatorname{sen}x)^4\cdot(\cos x)^3dx=\int t^4\cos^3x\cdot\frac{dt}{\cos x}=$$

$$=\int t^4\cdot\cos^2x\,dt=\int t^4(1-\operatorname{sen}^2x)\,dt=$$

$$=\int t^4(1-t^2)\,dt=\int t^4-t^6\,dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}$$

Deshacemos el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$:

$$\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} = \boxed{\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C}$$

solución.

3. Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$ se pide:

ⓐ Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

$A(1,1,1)$
$B(1,3,-3)$
$C(-3,-1,1)$

$\vec{AB}(0,2,-4)$
$\vec{AC}(-4,-2,0)$
$A(1,1,1)$

Para sacar un plano que contiene 3 puntos, necesito dos vectores directores y un punto

$$\pi \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 16y - 16 - (8x - 8 + 0 - 8z + 8) = 0$$

(pto)

$16y - 16 - 8x + 8 + 8z - 8 = 0$

$-8x + 16y + 8z - 16 = 0$

(divido entre 8 para simplificar)

$$\boxed{-x + 2y + z - 2 = 0}$$

ⓑ Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AD}$ sean linealmente dependientes.

Sólo tenemos que sustituir cualquier valor al azar de dos incógnitas cualquiera (distintas a las de los puntos A, B ó C) y sacar la otra incógnita. Por ejemplo:

$x = 0$; $y = 1$; $\Rightarrow \pi \equiv -x + 2y + z - 2 = 0$

$-0 + 2 \cdot 1 + z - 2 = 0$

$z = 2 - 2 = 0 \rightarrow \boxed{z = 0}$

$\boxed{\text{PUNTO D } (0,1,0)}$

ⓒ Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual 1.

Si P es un punto del eje OX tiene que ser $(x_p, 0, 0)$

Para sacar el volúmen de un tetraedro necesitamos todos los vectores que lo forman:

$\vec{AB}\ (0, 2, -4)$

$\vec{AC}\ (-4, -2, 0)$

$\vec{AP}\ (x_p - 1, -1, -1)$

$$\text{VOLUMEN} = \frac{1}{6}\left|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AP}]\right| = \boxed{1}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ x_p - 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \left|[0 + 0 - 16 - (8x_p - \cancel{8} + 0 + \cancel{8})]\right| = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{6}\left|-16 - 8x_p\right| = 1}$$

$$|-16 - 8x_p| = 6$$

Como es valor absoluto:

$$|-16 - 8x_p| = 6 \begin{cases} +(-16 - 8x_p) = 6 \rightarrow -16 - 8x_p = 6 \rightarrow x_p = \frac{6+16}{-8} \\ x_p = \frac{22}{-8} \Rightarrow \boxed{x_p = \frac{-11}{4}} \\ -(-16 - 8x_p) = 6 \rightarrow 16 + 8x_p = 6 \rightarrow x_p = \frac{6-16}{8} = \frac{-10}{8} \\ \boxed{x_p = \frac{-5}{4}} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } x_p = \frac{-11}{4} \rightarrow P\left(\frac{-11}{4}, 0, 0\right) \\ \text{Si } x_p = \frac{-5}{4} \rightarrow P\left(\frac{-5}{4}, 0, 0\right) \end{array}}$$

4. Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

ⓐ Se sabe que el 40% del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes habría un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

Es una distribucion binomial $B(8; 0'4)$

población: $n = 8$

$p(X \geq 2) = 1 - [p(X=0) + p(X=1)] =$

$= 1 - \left[\binom{8}{0} 0'4^0 \cdot 0'6^8 + \binom{8}{1} 0'4^1 \cdot 0'6^7\right] =$

$= 1 - (0'6^8 + 0'4 \cdot 0'6^7) = \boxed{0'8936}$

b) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5'6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8'2$ es 0'67, calcule σ.

Es una distribución normal $N(5'6; \sigma)$

$P(X \leq 8'2) = P\left(Z \leq \frac{8'2 - 5'6}{\sigma}\right) = 0'67$

$\frac{8'2 - 5'6}{\sigma} = 0'44 \rightarrow \boxed{\sigma = 5'91}$

MATEMÁTICAS II - EXAMEN SELECTIVIDAD MADRID JULIO 2019

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide:

ⓐ Calcular para que valores "a" $\in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)^2 & 1-a+1+a \\ 1-a+1+a & (1+a)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1^2+a^2-2a & 2 \\ 2 & 1^2+a^2+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2a+1 & 2 \\ 2 & a^2+2a+1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - I = 2A$$

$$\begin{pmatrix} a^2-2a+1 & 2 \\ 2 & a^2+2a+1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^2-2a+1 & 2 \\ 2 & a^2+2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2-\cancel{2a}+1 = 2-\cancel{2a} \\ 2 = 2 \checkmark \\ 2 = 2 \checkmark \\ a^2+\cancel{2a}+1 = 2+\cancel{2a} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a^2+1 = 2 \\ a^2+1 = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a^2+1 = 2 \\ a^2 = 1 \\ \boxed{a = \pm 1} \end{array}$$

ⓑ Calcular los números reales "a" para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro "a".

Para que una matriz tenga inversa $|A| \neq 0$. Calculamos $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1-a)(1+a) - 1\cdot 1 = 1^2 - a^2 - 1 = -a^2$$

$-a^2 = 0 \rightarrow \boxed{a=0} \rightarrow$ EXISTE INVERSA DE A cuando $a \neq 0$

Inversa de $A^{-1} = \dfrac{(\text{Adj } A)^t}{|A|} = \boxed{\dfrac{\begin{pmatrix} -(a+1) & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}}{a^2}}$

ⓒ Calcular, en función de "a", el determinante de la matriz $(A \cdot A^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

$$|(A\cdot A^t)^2| = |(A\cdot A^t)|^2 = |(A\cdot A^t)|\cdot|(A\cdot A^t)| = |A|\cdot|A^t|\cdot|A|\cdot|A^t|$$

$|A^t| = |A|$ asique $|A\cdot A^t)^2| = |A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot|A| = |A|^4 = (-a^2)^4 =$

$= \boxed{a^8}$

$\boxed{2.}$ Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos "t" días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10-t)$

ⓐ Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

$F'(t) = 10t^2 - t^3 \rightarrow F(t) = \int F'(t)\,dt = \int 10t^2 - t^3\,dt = \dfrac{10t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + C$

Inicialmente significa $t=0$; asique $F(0) = 6$

$\dfrac{10t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + C = 6$ (para $t=0$) $\rightarrow \dfrac{10\cdot \cancel{0^3}}{\cancel{3}} - \dfrac{\cancel{0^4}}{\cancel{4}} + C = 6$

$\boxed{C = 6}$

$$\boxed{F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6}$$

ⓑ Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

Para saber un máximo se tiene que estudiar la función derivada:

$$F'(t) = 10t^2 - t^3 = 0 \rightarrow t^2(10-t) = 0 \begin{cases} t=0 \\ t=10 \end{cases}$$

	(−1)	0	(+1)	10	(+12)
F(t)	⊕		⊕		⊖
	↗ crece		↗ crece		↘ decrece

máximo en el pto $x=10 \rightarrow f(10) = 839'3\overset{\frown}{3}$

$$f(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6 = \frac{10000}{3} - \frac{10000}{4} + 6 = 839'\overset{\frown}{3}$$

$\boxed{\text{máximo } (10,\ 839'\overset{\frown}{3})}$

máximo en el día 10

ⓒ Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Sabemos que el brote tiene un máximo en el día 10. Veamos que valores toma los siguientes días, para luego poder aplicar el teorema de Bolzano.

$F(10) = 839'\overset{\frown}{3}$

$$F(11) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6 = \frac{13310}{3} - \frac{14641}{4} + 6 = 782'41\overset{\frown}{6}$$

$$F(12) = \frac{17280}{3} - \frac{20736}{4} + 6 = 582$$

$F(13) = 189'083 > 0$
$F(14) = -451'33 < 0$

Aquí aplicaremos el teorema de Bolzano. La función $F(t)$ es continua y además cumple: $F(13) = 189'083$ y $F(14) = -451'33$

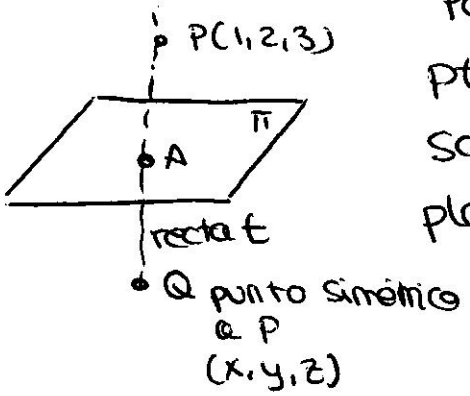
por el teorema de Bolzano $\exists\ c \in [13, 14] \ / \ F(c) = 0$. Es decir, entre 13 y 14 días.

$\boxed{3.}$ Dados el plano; $\pi \equiv 2x+3y-z=4$; y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases} \quad y \quad s \equiv (x,y,z)=(1,2,3)+(1,0,1)\lambda$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Se pide:

ⓐ Calcular el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de π.



Para calcular el punto simétrico a un pto dado respecto a un plano π hay que sacar primero la recta perpendicular al plano π y que pase por los ptos P y Q.

$P(1,2,3)$ $\quad \pi \equiv 2x+3y-z-4=0$

Para sacar la recta $\perp$ perpendicular utilizamos el vector normal al plano $n_\pi(2,3,-1)$

$$\text{recta } t \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$$

Ahora calculamos el punto de corte A de la recta t con el plano π. Para ello "metemos" la recta en el plano y despejamos λ.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+3y-z-4=0 \\ t \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2(1+2\lambda)+3(2+3\lambda)-(3-\lambda)-4=0 \\ 2+4\lambda+6+9\lambda-3+1\lambda-4=0 \\ 4\lambda+9\lambda+1\lambda=-2-6+3+4 \\ 14\lambda=-1 \rightarrow \boxed{\lambda=\frac{-1}{14}} \end{array}$$

Ahora sacamos las coordenadas del pto A sustituyendo λ en nuestra recta "t".

$$t \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda=1-2\cdot\frac{1}{14}=\frac{14-2}{14}=\frac{12}{14}=\frac{6}{7} \\ y=2+3\lambda=2-3\cdot\frac{1}{14}=\frac{28-3}{14}=\frac{25}{14} \\ z=3-\lambda=3+\frac{1}{14}=\frac{42+1}{14}=\frac{43}{14} \end{cases} \quad \boxed{A\left(\frac{6}{7},\frac{25}{14},\frac{43}{14}\right)}$$

Como Q es el pto simétrico a P; A es el pto medio. Vamos a calcular las coordenadas de Q a partir del pto medio.

(x) → $x_A = \frac{x_P + x_Q}{2} \rightarrow \frac{6}{7} = \frac{1 + x_Q}{2} \rightarrow 12 = 7(1 + x_Q)$

$12 = 7 + 7x_Q \rightarrow 12 - 7 = 7x_Q \rightarrow \boxed{\frac{5}{7} = x_Q}$

(y) → $y_A = \frac{y_P + y_Q}{2} \rightarrow \frac{25}{14} = \frac{2 + y_Q}{2} \rightarrow 50 = 14(2 + y_Q)$

$50 = 28 + 14y_Q \rightarrow y_Q = \frac{50 - 28}{14} = \frac{22}{14} = \boxed{\frac{11}{7} = y_Q}$

(z) → $z_A = \frac{z_P + z_Q}{2} \rightarrow \frac{43}{14} = \frac{3 + z_Q}{2} \rightarrow 86 = 14(3 + z_Q)$

$86 = 42 + 14z_Q \rightarrow \frac{86 - 42}{14} = z_Q = \frac{44}{14} = \boxed{\frac{22}{7} = z_Q}$

$\boxed{\text{Pto simétrico } Q\left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)}$ ✓

(b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto de intersección de las rectas "r" y "s". Si la recta pedida es perpendicular al plano π, su vector director (de la recta pedida) será el mismo que el vector normal al plano $n_\pi(2, 3, -1)$. Así que ya tenemos nuestro vector director de la recta pedida $V_d(2, 3, -1)$. Falta el punto de corte de ambas rectas "r" y "s".

Recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ → la pasamos a paramétricas → $r \equiv \begin{cases} \ominus \; \cancel{x} + \cancel{y} - z = 0 \\ \cancel{x} + \cancel{y} + z = 2 \end{cases}$

$-2z = -2$

$\boxed{z = 1}$

Tomamos $\boxed{y = \lambda}$ → $x + y - z = 0$

$\boxed{x = 1 - \lambda}$

↳ $x + y + z = 2 \rightarrow x = 2 - 1 - \lambda$

$\boxed{x = 1 - \lambda}$

Recta r en paramétricas $\equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$

Ahora hacemos lo mismo con la recta "s", la pasamos a paramétricas: $s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + (1, 0, 1)\lambda$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Para sacar el punto de corte entre ambas rectas igualamos x, y, z de cada una de las rectas para sacar el valor de λ_r y λ_s correspondiente al punto de corte.

$$\left.\begin{array}{ll} (x) \rightarrow & 1 - \lambda_R = 1 + \lambda_s \\ (y) \rightarrow & \lambda_R = 2 \\ (z) \rightarrow & 1 = 3 + \lambda_s \end{array}\right\} \begin{array}{l} \boxed{\lambda_R = 2} \\ \boxed{\lambda_s = -2} \end{array}$$

Punto de corte entre recta "r" y recta "s":

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda_s = 1 - 2 = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda_s = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

Comprobamos dicho punto en la recta "r":

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda_R = 1 - 2 = -1 \\ y = \lambda_R = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Punto de Corte $\boxed{C(-1, 2, 1)}$

Ahora sacamos la recta pedida con el pto $C(-1, 2, 1)$ y el vector director $Vd(2, 3, -1)$

Recta pedida $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

ⓒ Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

Para sacar el ángulo que forman dos rectas usaremos la fórmula:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v_r} \cdot \vec{v_s}|}{|\vec{v_r}| \cdot |\vec{v_s}|}$$ donde $v_s(1,0,1)$ y $v_r(-1,1,0)$

$$\cos\alpha = \frac{|(1,0,1)\cdot(-1,1,0)|}{\left|\sqrt{1^2+0^2+1}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\right|} = \frac{|-1+0+0|}{|\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}|} = \frac{1}{2}$$

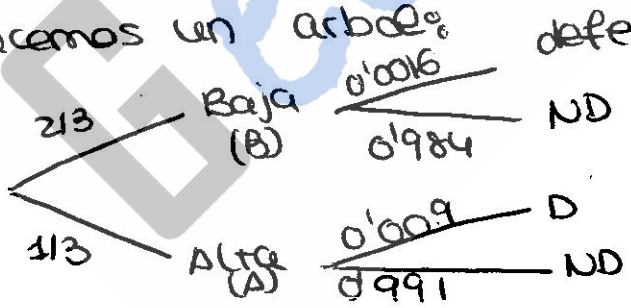
$$\boxed{\alpha = 60^\circ}$$ ✓

---

4 Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1'6%, mientras que para los de gama alta es del 0'9%. En un control de calidad previa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

ⓐ Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

Hacemos un árbol:



$$P(D) = P\left(\frac{D}{B}\right)\cdot P(B) + P\left(\frac{D}{A}\right)\cdot P(A) = \frac{2}{3}\cdot 0'016 + \frac{1}{3}\cdot 0'009 =$$

$$\boxed{P(D) = 0'0137\ (1'37\%)}$$

(b) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

$$P\left(\frac{B}{D}\right) = \frac{P\left(\frac{D}{B}\right) \cdot P(B)}{P(D)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0'016}{0'0137} = 0'78$$

$\boxed{78\%}$ ✓